Θέμα Α

Α1. Κάθε συνάρτηση της μορφής G(x)=F(x)+c, όπου c$\in R$ είναι μία παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε x$\in$ Δ.

Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε x ϵ Δ ισχύει F'(x) = f(x) και G'(x) = f(x), οπότε G'(x) = F'(x), για κάθε x ϵ Δ . Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε G(x) = F(x) + c, για κάθε x ϵ Δ

Α2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε : $f'(x_0) = 0$

Α3. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι +∞ ή -∞ τότε η ευθεία $x=x_0$ ονομάζεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Α4. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Για να ορίζεται η $f\circ g$ θα πρέπει

x ϵ $A_g \Leftrightarrow$ x≥0

και g(x) ϵ $A_f \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow$x≤1

άρα το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ είναι το [0,1].

Β2. h'(x)=2(x-1) και αφού $A_h = [0,1]$ άρα h'(x)<0 άρα h γνησίως φθίνουσα και συνεπώς 1-1. Για να βρούμε τον τύπο της h^{-1} έχουμε

$$y=h(x) \Rightarrow y=(x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = |x-1| \overset{x-1\leq 0}{\Longrightarrow} \sqrt{y} = -x+1 \Rightarrow x = -\sqrt{y}+1$$

άρα $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$.

Το σύνολο τιμών της h είναι h([0,1])=[h(1),h(0)]=[0,1]

άρα $A_{h^{-1}} = [0,1]$.

B3. i) Η φ είναι συνεχής στο [0,1) ως πράξεις συνεχών και στο 1 καθώς :

$$\lim_{x\to1^-}\varphi(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

Άρα $\lim_{x\to1}\varphi(x)=\varphi(1)=\frac{1}{2}$

Αφού φ(0)≠φ(1) ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο [0,1].

ii) $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right)<\eta\mu\alpha<\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1$

Από το προηγούμενο ερώτημα, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών έχουμε ότι για κάθε ξ μεταξύ φ(0) και φ(1) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ έτσι ώστε $\varphi(x_0)=\xi$. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$.

Θέμα Γ

Γ1. Για x>-1 ισχύει $f'(x)=(x^3-x)'$ άρα υπάρχει $c_1\in R$ έτσι ώστε

$f(x)=x^3-x+c_1$. Αφού f(0)=0 ⇒ $c_1=0$ άρα $f(x)=x^3-x$ για x<-1.

Για x<-1 ισχύει $f'(x)=(-2x)'$ άρα υπάρχει $c_2\in R$ έτσι ώστε $f(x)=-2x+c_2$.

Αφού η f είναι συνεχής στο R θα είναι συνεχής στο -1, άρα $\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)\Leftrightarrow\lim_{x\to-1^-}(-2x+c_2)=\lim_{x\to-1^+}(x^3-x)$

$\Leftrightarrow 2+c_2=-1+1\Leftrightarrow c_2=-1$. Άρα $f(x)=\begin{cases}-2x-2 & , \ x\le-1\\ x^3-x & , \ x>-1\end{cases}$

Γ2. Η εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, με $x_0>-1$ είναι:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-(x_0^3-x_0)=(3x_0^2-1)(x-x_0)\Leftrightarrow$$
$$y=(3x_0^2-1)x-3x_0^3+x_0+x_0^3-x_0\Leftrightarrow y=(3x_0^2-1)x-2x_0^3.$$

Η εφαπτομένη ε τέμνει τον y'y στο -2 οπότε για x=0 και y=-2 η εξίσωση γράφεται: $-2=(3x_0^2-1)\cdot0-2x_0^3\Leftrightarrow 2x_0^3=2\Leftrightarrow x_0^3=1\Leftrightarrow x_0=1.$

Επομένως έχουμε ε: y=2x-2.

Γ3. Το σημείο Κ έχει συντεταγμένες (x,0). Αφού x>2, θα είναι (ΚΓ)=x-2. Επίσης y=2x-2>0 αφού x>2. Άρα (ΚΜ)=2x-2. Για το εμβαδό του ΜΚΓ έχουμε $E = \frac{1}{2}(K\Gamma)(KM) = \frac{1}{2}(x-2)2(x-1) = x^2 - 3x + 2$. Εφόσον το x μεταβάλλεται με τον χρόνο έχουμε $E(t) = x(t)^2 - 3x(t) + 2$.

$$E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t)$$

Την χρονική στιγμή t_0 έχουμε $x(t_0)=3$, $x'(t_0)=2$, οπότε

$E'(t0) = 2x(t0)x'(t0) - 3x'(t0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 6$ τετραγωνικές μονάδες ανά δευτερόλεπτο.

Γ4. Στο όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3}$ θέτουμε –x=u οπότε το όριο γίνεται $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{1+u^3} = \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{u^3-u}{1+u^3} = \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{u^3}{u^3} = 1$, αφού f(u)= $u^3 - u$ κοντά στο +∞.

Από την άλλη f(x)=-2x-2 κοντά στο -∞, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

$-1\le \eta\mu f(x) \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} \le \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \le \frac{1}{f(x)}$. Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{f(x)} = 0$ από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 0$. Επομένως το ζητούμενο όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} = 0 + 1 = 1$.

Θέμα Δ

Δ1.i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (0,+∞) και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(x - \ln(3x)\right)' = 1 - \frac{1}{3x}\cdot(3x)' = 1 - \frac{1}{3x}\cdot 3 = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [1,+∞) και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,1]. Θεωρούμε το διάστημα Α1 = (0,1]. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Α1 , οπότε το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο $[f(1), \lim\limits_{x\to0^-} f(x))$

f(1)=1-ln3<0 και $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(x - \ln(3x)\right) = +\infty$

Αφού 0 ϵ f(A1) και f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα A1 άρα υπάρχει μία μοναδική λύση στο A1. Ακόμα

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln(3x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{\ln(3x)}{x}\right)\right] = +\infty$$

καθώς $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x)}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(3x))'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3x}\cdot(3x)'}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x}\cdot 3 = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Στο διάστημα A2=[1,+∞) η f είναι γνησίως αύξουσα και f(A2)=[1-ln3,+∞). Αφού 0 ϵ f(A2) άρα υπάρχει μοναδική λύση στο A2. Άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δύο λύσεις x_1,x_2 με $x_1<1<x_2$.

ii) $f''(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} > 0$, άρα η f είναι κυρτή.

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδό είναι το E= $\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|\,dx$. Η f είναι συνεχής στο (x_1,x_2) και δεν έχει ρίζα σε αυτό, συνεπώς θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αφού f(1)<0 άρα f(x)<0 για x ϵ(x_1,x_2). Άρα E=$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx =$

$\int_{x_1}^{x_2}(\ln(3x)-x)\,dx$ Για το ολοκλήρωμα $\int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)\,dx$ θέτουμε 3x=u οπότε $u_1=3x_1$, $u_2=3x_2$ και du=3dx. Οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)dx = \frac{1}{3}\int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)3dx = \frac{1}{3}\int_{3x_1}^{3x_2}\ln u du = \frac{1}{3}\int_{3x_1}^{3x_2}u'\cdot\ln u du = \frac{1}{3}\left(\left[u\cdot\ln u\right]_{3x_1}^{3x_2} - \int_{3x_1}^{3x_2}u\cdot(\ln u)'du\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3x_2\ln(3x_2) - 3x_1\ln(3x_1) - \int_{3x_1}^{3x_2}u\cdot\frac{1}{u}du\right) = \frac{1}{3}\left(3x_2\ln(3x_2) - 3x_1\ln(3x_1) - \int_{3x_1}^{3x_2}du\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3x_2\ln(3x_2) - 3x_1\ln(3x_1) - [u]_{3x_1}^{3x_2}\right) = \frac{1}{3}\left(3x_2\ln(3x_2) - 3x_1\ln(3x_1) - (3x_2 - 3x_1)\right) =$$

$$= x_2\ln(3x_2) - x_1\ln(3x_1) - x_2 + x_1$$

Όμως $f(x_1)=0 \Leftrightarrow x_1-\ln(3x_1)=0 \Leftrightarrow \ln(3x_1)=x_1$

$f(x_2)=0 \Leftrightarrow x_2-\ln(3x_2)=0 \Leftrightarrow \ln(3x_2)=x_2$

Άρα $\int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)dx = x_2\cdot x_2 - x_1\cdot x_1 - x_2 + x_1 = x_2^2 - x_1^2 - x_2 + x_1$

Ακόμα $\int_{x_1}^{x_2}xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με:

$$x_2^2 - x_1^2 - x_2 + x_1 - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} - x_2 + x_1 = \frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_1^2 - 2x_2 + 2x_1\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_1^2 - 2x_2 + 2x_1\right) = \frac{1}{2}\left[\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 + x_1\right) - 2\left(x_2 - x_1\right)\right] = \frac{1}{2}\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 + x_1 - 2\right)$$

Δ3. Είναι $0<x_1<1 \Leftrightarrow -1<-x_1<0 \Leftrightarrow 1<2-x_1<2$

Από το Δ2 ερώτημα έχουμε $E>0 \Leftrightarrow x_1+x_2-2>0 \Leftrightarrow 2-x_1<x_2$ επομένως

$1< 2-x_1<x_2$. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ προκύπτει

$f(2-x_1)<f(x_2)=0$

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(x_2,f(x_2))$ είναι:

$$(\epsilon): y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$$

Καθώς η f είναι κυρτή, η γραφική παράσταση θα είναι πάνω από την ε, με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή $f(x) \geq f'(x) \cdot (x - x_2)$ με την ισότητα να ισχύει για $x=x_2$.

Επειδή η f είναι κυρτή παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο x=1, επομένως $f(x) \geq f(1)=1-\ln 3 \Leftrightarrow f(x)+\ln 3 \geq 1$, με την ισότητα να ισχύει για x=1.

Αφού οι ισότητες ισχύουν για διαφορετικά x, με πρόσθεση των σχέσεων κατά μέλη έχουμε $2f(x)+\ln 3>1 + f'(x_2)(x - x_2)$ για κάθε πραγματικό x. Επομένως η δοσμένη εξίσωση δεν έχει λύση.

Επιμέλεια: Μακρίδης Ραφαήλ-Γεώργιος